

Matemática Atuarial II

Aula 9

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Créditos: Leonardo Henrique Costa; leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

➤ Notas de aula da disciplina Matemática Atuarial II, oferecida pelo curso de Bacharelado em Ciências Atuariais da Universidade Federal de Alfenas, Campus Varginha.

PIRES, M.D. COSTA, L.H. Status vida conjunta: Anuidades. [Notas de aula].
Universidade Federal de Alfenas, Curso de Ciências Atuariais, Alfenas, 2026.
Disponível em:
https://atuaria.github.io/portahalley/notas_MatAtuarial2.html. Acesso em:
28 jun. 2026.

Status vida conjunta (Anuidades)

No caso do status de vida conjunta, as anuidades são calculadas considerando que os pagamentos são efetuados enquanto todas as vidas que compõem o status estiverem vivas.

Podem cessar ao fim do período de cobertura no caso da modalidade temporária

Status vida conjunta (Anuidades)

Anuidades imediatas vitalícias antecipadas para o status de vida conjunta

$$\ddot{a}_{x,y} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1 - v^{t+1}}{1 - v} {}_t p_{x,y} q_{x+t,y+t} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_{x,y}$$

Anuidades imediatas temporárias antecipadas para o status de vida conjunta

$$\ddot{a}_{u:\bar{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t E_{x,y} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_{x,y}$$

em que $u = \{x, y\}$.

EXEMPLO 1: Seja duas vidas que têm como probabilidades de mortes modeladas pela seguinte tábua

Idade	q_x
25	0,00077
26	0,00081
27	0,00085
28	0,00090
29	0,00095
30	0,001
31	0,00107

Considerando uma taxa de juros de 4% ao ano, calcule o V.P.A. de uma anuidade temporária por 3 anos considerando um status vida conjunta de uma pessoa de 30 anos de idade e outra de 28 anos de idade (pagamento antecipado).

EXEMPLO 1: Considerando uma taxa de juros de 4% ao ano, calcule o V.P.A. de uma anuidade temporária por 3 anos considerando um status vida conjunta de uma pessoa de 30 anos de idade e outra de 28 anos de idade (pagamento antecipado).

Idade	q_x
25	0,00077
26	0,00081
27	0,00085
28	0,00090
29	0,00095
30	0,001
31	0,00107

x	y	T. vida adicional	Z_t	$S_{T_{30,28}}(t) = {}_t p_{30} {}_t p_{28}$
30	28	$t > 0$	1	$T_{30} > 0$ e $T_{28} > 0$
31	29	$t > 1$	v	$T_{30} > 1$ e $T_{28} > 1$
32	30	$t > 2$	v^2	$T_{30} > 2$ e $T_{28} > 2$

$$\ddot{a}_{u:\overline{3}|} = P(T_{30,28} > 0) + v^1 P(T_{30,28} > 1) + v^2 P(T_{30,28} > 2)$$

em que $u = \{30,28\}$.

EXEMPLO 1: Considerando uma taxa de juros de 4% ao ano, calcule o V.P.A. de uma anuidade temporária por 3 anos considerando um status vida conjunta de uma pessoa de 30 anos de idade e outra de 28 anos de idade (pagamento antecipado).

$$\ddot{a}_{u:\overline{3}|} = P(T_{30,28} > 0) + v^1 P(T_{30,28} > 1) + v^2 P(T_{30,28} > 2)$$

$$\ddot{a}_{u:\overline{3}|} = 1 \cdot {}_0p_{30:28} + v \cdot {}_1p_{30:28} + v^2 \cdot {}_2p_{30:28}$$

$$\ddot{a}_{u:\overline{3}|} = \sum_{t=0}^2 v^t \cdot {}_tp_{30:28} \approx 2,88$$

em que $u = \{30,28\}$.

Status vida conjunta (Anuidades).

Anuidades imediatas vitalícias postecipadas para o status de vida conjunta

$$a_{x,y} = \sum_{t=1}^{\infty} v \left(\frac{1 - v^t}{1 - v} \right) {}_t p_{x,y} q_{x+t,y+t} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_{x,y}$$

Anuidades imediatas temporárias postecipadas para o status de vida conjunta

$$a_{u:\bar{n}|} = \sum_{t=1}^n {}_t E_{x,y} = \sum_{t=1}^n v^t {}_t p_{x,y}$$

em que $u = \{x, y\}$.

EXEMPLO 2: Considerando uma taxa de juros de 4% ao ano, calcule o V.P.A. de uma anuidade temporária por 3 anos considerando um status vida conjunta de uma pessoa de 30 anos de idade e outra de 28 anos de idade (pagamento **postecipado**).

Idade	q_x
25	0,00077
26	0,00081
27	0,00085
28	0,00090
29	0,00095
30	0,001
31	0,00107

EXEMPLO 2: Considerando uma taxa de juros de 4% ao ano, calcule o V.P.A. de uma anuidade temporária por 3 anos considerando um status vida conjunta de uma pessoa de 30 anos de idade e outra de 28 anos de idade (pagamento **postecipado**).

$$a_{u:\overline{3}|} = vP(T_{30,28} > 1) + v^2P(T_{30,28} > 2) + v^3P(T_{30,28} > 3)$$

$$a_{u:\overline{3}|} = vp_{30:28} + v^2 {}_2p_{30:28} + v^3 {}_3p_{30:28}$$

$$a_{u:\overline{3}|} = \sum_{t=1}^3 v^t {}_tp_{30:28} \approx 2,713$$

em que $u = \{30,28\}$.

Idade	q_x
25	0,00077
26	0,00081
27	0,00085
28	0,00090
29	0,00095
30	0,001
31	0,00107

Status vida conjunta (Anuidades)

- *Status composto por n vidas (independentes)*

$$\ddot{a}_{x_1, x_2, \dots, x_n} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1 - v^{t+1}}{1 - v} {}_t p_{x_1, x_2, \dots, x_n} q_{x_1+t, x_2+t, \dots, x_n+t}$$

$$\ddot{a}_{x_1, x_2, \dots, x_n} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_{x_1, x_2, \dots, x_n}$$

Status vida conjunta (Anuidades)

- *Status composto por n vidas (independentes)*

$$\ddot{a}_{x_1, x_2, \dots, x_n} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1 - v^{t+1}}{1 - v} {}_t p_{x_1, x_2, \dots, x_n} q_{x_1+t, x_2+t, \dots, x_n+t} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_{x_1, x_2, \dots, x_n}$$

$${}_t p_{x_1, x_2, \dots, x_n} = P(T_{x_1} > t \text{ e } T_{x_2} > t \text{ e } \dots \text{ e } T_{x_n} > t)$$

$${}_t p_{x_1, x_2, \dots, x_n} = {}_t p_{x_1} {}_t p_{x_2} \cdots {}_t p_{x_n}$$

$${}_t q_{x_1, x_2, \dots, x_n} = 1 - {}_t p_{x_1, x_2, \dots, x_n}$$

Status vida conjunta (Anuidades)

- Para $n = 3$ vidas (independentes)

$${}_t p_{x_1, x_2, x_3} = {}_t p_{x_1} {}_t p_{x_2} {}_t p_{x_3}$$

$${}_t q_{x_1, x_2, x_3} = 1 - {}_t p_{x_1} {}_t p_{x_2} {}_t p_{x_3}$$

$${}_t q_{x_1, x_2, x_3} = 1 - (1 - {}_t q_{x_1})(1 - {}_t q_{x_2})(1 - {}_t q_{x_3})$$

$${}_t q_{x_1, x_2, x_3} = 1 - (1 - {}_t q_{x_1} - {}_t q_{x_2} - {}_t q_{x_3} + {}_t q_{x_1} {}_t q_{x_2} + {}_t q_{x_1} {}_t q_{x_3} + {}_t q_{x_2} {}_t q_{x_3} - {}_t q_{x_1} {}_t q_{x_2} {}_t q_{x_3})$$

$${}_t q_{x_1, x_2, x_3} = {}_t q_{x_1} + {}_t q_{x_2} + {}_t q_{x_3} - {}_t q_{x_1} {}_t q_{x_2} - {}_t q_{x_1} {}_t q_{x_3} - {}_t q_{x_2} {}_t q_{x_3} + {}_t q_{x_1} {}_t q_{x_2} {}_t q_{x_3}$$

Status vida conjunta (Anuidades)

$$\ddot{a}_{x_1, x_2, x_3} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1 - v^{t+1}}{1 - v} {}_t p_{x_1, x_2, x_3} q_{x_1+t, x_2+t, x_3+t} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_{x_1, x_2, x_3}$$

$$a_{x_1, x_2, x_3} = \sum_{t=1}^{\infty} v \frac{1 - v^t}{1 - v} {}_t p_{x_1, x_2, x_3} q_{x_1+t, x_2+t, x_3+t} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_{x_1, x_2, x_3}$$

$$A_{x_1, x_2, x_3} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t p_{x_1, x_2, x_3} q_{x_1+t, x_2+t, x_3+t}$$

EXEMPLO 3: Considerando uma taxa de juros de 3% ao ano e a tábua AT-49 calcule o que se pede: (entregar)

a) $\ddot{a}_{41,39,40:\overline{4}|}$

b) $a_{41,39,40:\overline{3}|}$

c) $A_{41,39,40:\overline{3}|}^1$

Status vida conjunta (Produtos diferidos)

- Anuidade vitalícia diferida por m anos, com pagamento antecipado

$${}_m|\ddot{a}_{x,y} = (v^m {}_m p_{x,y}) \ddot{a}_{x+m,y+m}$$

- Plano temporário por n anos, diferido por m anos, com pagamento antecipado

$${}_m|\ddot{a}_{u:\bar{n}|} = (v^m {}_m p_{x,y}) \ddot{a}_{w:\bar{n}|}$$

- Anuidade vitalícia diferida por m anos, com pagamento postecipado

$${}_m|a_{x,y} = (v^m {}_m p_{x,y}) a_{x+m,y+m}$$

- Anuidade temporária de prazo n , diferida por m anos, com pagamento postecipado

$${}_m|a_{u:\bar{n}|} = (v^m {}_m p_{x,y}) a_{w:\bar{n}|}$$

*Considerando um benefício unitário, $T_{x,y} = \min\{T_x, T_y\}$, $u = \{x, y\}$ e $w = \{x + m, y + m\}$

Status vida conjunta (Anuidades-tempo contínuo)

Em tempo contínuo, não há distinção entre anuidade antecipada e postecipada, pois os pagamentos são realizados continuamente ao longo do tempo.

Dado o tempo de vida adicional de um status vida conjunta, T_u , em que $u = \{x, y\}$, o plano vitalício e o plano temporário com cobertura de n anos, têm seus valores presentes atuariais calculados respectivamente por:

$$\bar{a}_u = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_u dt = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} f_{T_u}(t) dt$$

$$\bar{a}_{u:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_u dt$$

Status vida conjunta (Anuidades-tempo contínuo)

$$\bar{a}_{x,y} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_{x,y} dt = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} f_{T_{x,y}}(t) dt$$

$$\bar{a}_{x,y} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_{x,y} dt = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} {}_t p_{x,y} \mu(x+t, y+t) dt$$

$${}_t p_{x,y} = {}_t p_x {}_t p_y$$

$$\mu(x+t, y+t) = \mu(x+t) + \mu(y+t)$$

Status vida conjunta (Anuidades-tempo contínuo)

$$\bar{a}_{x,y,z} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_{x,y,z} dt = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} f_{T_{x,y,z}}(t) dt$$

$$\bar{a}_{x,y,z} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_{x,y,z} dt = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} {}_t p_{x,y,z} \mu(x+t, y+t, z+t) dt$$

$${}_t p_{x,y,z} = {}_t p_x {}_t p_y {}_t p_z$$

$$\mu(x+t, y+t, z+t) = \mu(x+t) + \mu(y+t) + \mu(z+t)$$

EXEMPLO 3: Considere um status vida conjunta composto por x , y e z , tais que $T_x \sim \text{Exp}(0,022)$, $T_y \sim \text{Exp}(0,025)$ e $T_z \sim \text{Exp}(0,05)$. Calcule $\bar{a}_{x,y,z}$ usando uma taxa de juros instantânea de 3% ao ano.

EXEMPLO 3: Considere um status vida conjunta composto por x , y e z , tais que $T_x \sim \text{Exp}(0,022)$, $T_y \sim \text{Exp}(0,025)$ e $T_z \sim \text{Exp}(0,05)$. Calcule $\bar{a}_{x,y,z}$ usando uma taxa de juros instantânea de 3% ao ano.

$${}_t p_{x,y,z} = {}_t p_x {}_t p_y {}_t p_z = e^{-t(0,022+0,025+0,05)} = e^{-t0,097}$$

$$\mu(x+t, y+t, z+t) = \mu(x+t) + \mu(y+t) + \mu(z+t) = 0,022 + 0,025 + 0,05 = 0,097$$

$$\bar{a}_{x,y,z} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_{x,y,z} dt = \int_0^{\infty} e^{-0,03 t} e^{-t0,097} dt$$

$$\bar{a}_{x,y,z} = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} {}_t p_{x,y,z} \mu(x+t, y+t, z+t) dt = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-0,03 t})}{0,03} e^{-t0,097} 0,097 dt$$

Status vida conjunta (Produtos diferidos)

- Anuidades diferidas vitalícias

$${}_m|\bar{a}_{x,y} = (v^m {}_mp_{x,y})\bar{a}_{x+m,y+m}$$

- Anuidades diferidas temporárias

$${}_m|\bar{a}_{u:\bar{n}|} = (v^m {}_mp_{x,y})\bar{a}_{w:\bar{n}|}$$

em que $u = \{x, y\}$, $w = \{x + m, y + m\}$, m igual ao período de diferimento e n igual ao período de cobertura.

Status vida conjunta (Relações importantes)

$$A_{x,y} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y}) (q_{x+t,y+t})$$

$$A_{x,y} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y}) (1 - p_{x+t,y+t}) = \sum_{t=0}^{\infty} [v^{t+1} ({}_t p_{x,y}) - v^{t+1} ({}_t p_{x,y}) p_{x+t,y+t}]$$

$$A_{x,y} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y}) - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_{t+1} p_{x,y})$$

$$A_{x,y} = v \sum_{t=0}^{\infty} v^t ({}_t p_{x,y}) - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_{t+1} p_{x,y})$$

...

Status vida conjunta (Relações importantes)

$$\dots$$
$$A_{x,y} = v\ddot{a}_{x,y} - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_{t+1}p_{x,y}) = v\ddot{a}_{x,y} - \sum_{t=1}^{\infty} v^t ({}_tp_{x,y})$$

$$A_{x,y} = v\ddot{a}_{x,y} - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_{t+1}p_{x,y}) = v\ddot{a}_{x,y} - a_{x,y}$$

$$A_{x,y} = v\ddot{a}_{x,y} - a_{x,y}$$

Como $a_{x,y} = \ddot{a}_{x,y} - 1$

$$A_{x,y} = v\ddot{a}_{x,y} - (\ddot{a}_{x,y} - 1)$$



Status vida conjunta (Relações importantes)

$$A_{x,y} = v \ddot{a}_{x,y} - (\ddot{a}_{x,y} - 1)$$

$$A_{x,y} = v \ddot{a}_{x,y} - \ddot{a}_{x,y} + 1$$

$$A_{x,y} = \ddot{a}_{x,y}(v - 1) + 1$$

Status vida conjunta (Relações importantes)

Verifique com exemplos que:

$$A_{x,y} = v\ddot{a}_{x,y} - a_{x,y}$$

$$A_{x,y} = \ddot{a}_{x,y}(v - 1) + 1$$

Entregar!!!

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba : CRV, 2022.

